$$f_y(0,0) = -2\times 2 + 3\times 1 = -1 \neq 0 \qquad ⑧$$

よって、$(2,1)$ 近傍では「y」は「x」から一意的に定まる。

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2,y=1} = -\left.\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right|_{x=2,y=1} = -\left.\frac{2x-2y}{-2x+3y^2}\right|_{x=2,y=1} = -\frac{2\times 2-2\times 1}{-2\times 2+3\times 1} = 2 \qquad \text{⑨→①に一致}$$

【解答 2-16】　重積分

与式を用いると、

$$I = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-xy}\left(\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right) = \int_0^\infty dx\left[\frac{e^{-yx}}{-x}\right]_{y=0}^{y=\infty}\left(\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right) = \int_0^\infty dx\frac{1}{x}\left(\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right)$$

$$= \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \frac{e^{(ia-y)x}-e^{-(ia+y)x}}{2i} = \frac{1}{2i}\int_0^\infty dy\left[\frac{e^{(ia-y)x}}{ia-y}+\frac{e^{-(ia+y)}}{ia+y}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dy\left[-\frac{1}{ia-y}-\frac{1}{ia+y}\right] = \frac{-1}{2i}\int_0^\infty dy\frac{ia+y+ia-y}{(ia-y)(ia+y)}$$

$$= a\int_0^\infty dy\frac{1}{y^2+a^2} = a\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

【解答 2-17】　不定積分

$$\tan x = t, \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{dt}{dx} = \sec^2 x = 1+\tan^2 x = 1+t^2$$

と置換すると、

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \int\frac{1}{\dfrac{1}{1+t^2}+c^2\dfrac{t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int\frac{dt}{c^2t^2+1} = \frac{1}{c^2}\int\frac{dt}{t^2+\dfrac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{1}{c^2}c\tan^{-1}ct = \frac{1}{c}\tan^{-1}ct = \frac{1}{c}\tan^{-1}(c\tan x)$$

【参考】「Mathematica」で計算すると、図のようになる。

```
Integrate[1/((Cos[x])^2 + c^2 * (Sin[x])^2), x]
ArcTan[c Tan[x]]
────────────────
       c
```

【解答 2-18】　定積分

与式を「I」と置き、

$$x = \pi - t, dx = -dt \qquad ①$$

と置くと、